فرآیندهای تصادفی[1]

تعریف

یک فرآیند تصادفی $\{X(t), t \in T\}$ خانواده ای از متغیرهای تصادفی است. یعنی، به ازاء هر $t \in T$، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. مجموعهٔ اندیس گذار T را معمولا" زمان نامیده و $X(t)$ را حالت فرآیند[2] در زمان t میخوانیم. اگر مجوعهٔ اندیس گذار T شمارا باشد، فرآیند را گسسته زمان[3] نامیده ، و اگر T پیوسته باشد فرآیند را پیوسته زمان[4] می نامیم. مقادیری که متغیر تصادفی $X(t)$ اختیار می کند را فضای حالات[5] نامیده و این فضا می تواند گسسته یا پیوسته باشد.

گوئیم فرآیند دارای **نموهای مستقل**[6] است، هرگاه به ازاء هر دنباله از اندیس ها مانند $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$، متغیرهای تصادفی $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ مستقل از هم بوده، و گوئیم دارای نموهای ایستا[7] است اگر $X(t+s) - X(t)$ برای تمامی t های متعلق به T دارای توزیع ثابت باشد.

تعریف

فرآیند تصادفی $\{N(t), t \geq 0\}$ را فرآیند شمارشی[8] گوئیم، هرگاه $N(t)$ تعداد کل پیشآمدهایی باشد که تا زمان t رخ داده اند. بنابراین فرآیند شمارشی دارای ویژگی های زیر است:

---

[1] Stochastic Processes
[2] Process State
[3] Discrete - Time
[4] Continuouse - Time
[5] State Space
[6] Independent Increment
[7] Stationary Increament
[8] Counting Process

الف) $N(t) \geq 0$

ب) به ازاء هر $s < t$ ، $N(s) \leq N(t)$.

ت) برای $s < t$ ، $N(t) - N(s)$ برابر تعداد پیشآمدهایی است که در فاصلهٔ $(s,t]$ رخ داده اند.

تعریف

فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند پواسن[9] با نرخ $\lambda > 0$ گوئیم هرگاه :

الف) $N(0) = 0$.

ب) فرآیند دارای نموهای مستقل باشد.

ت) تعداد پیشآمدها در هر فاصلهٔ دلخواه به طول t دارای توزیع پواسن با میانگین λt باشد، یعنی $E[N(t)] = \lambda t$. این مطلب به این معنی است که در این فرآیند نموها ایستا است، یعنی به ازاء هر $s, t \geq 0$:

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

پس برای اثبات پواسن بودن یک فرآیند، بایستی شرایط ۳ گانهٔ فوق را بررسی نمود. می توان از تعریف زیر نیز برای فرآیند پواسن استفاده نمود. این دو تعریف معادل یکدیگر هستند.

تعریف

فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند پواسن با نرخ $\lambda > 0$ گوئیم هرگاه :

---

[9] Poisson Process

الف) $N(0) = 0$.

ب) فرآیند دارای نموهای مستقل و ایستا باشد.

ت) $P\{N(\delta) = 1\} = \lambda\delta + o(\delta)$

ث) $P\{N(\delta) \geq 2\} = o(\delta)$

تعریف

در یک فرآیند پواسن فرض کنیم X_1 زمان انتظار تا وقوع اولین پیشآمد باشد، و به ازاء $n \geq 1$ فرض کنیم X_n زمان بین (n-1) امین و n امین پیشآمد باشد. در اینصورت دنبالهٔ $\{X_n, n \geq 1\}$ را دنبالهٔ زمان های بین ورود می نامند. X_n ها، $n = 1,2,...$ ، متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع نمایی و میانگین $\frac{1}{\lambda}$ بوده و این فرآیند بی حافظه است، یعنی این فرآیند دارای نموهای مستقل و ایستا است.

نتیجه

اگر فرآیند $\{X_n, n \geq 1\}$، فرآیند زمان های بین ورود باشد و برای $n \geq 1$ ؛ و $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ آنگاه S_n دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ است و چگالی آن عبارتست از:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad ; \quad t \geq 0$$

و در آن S_n عبارتست از زمان انتظار[10] تا وقوع n _ امین پیشآمد.

قضیه

---

[10] Waiting Time

فرض کنید در یک فرآیند پواسن با نرخ $\lambda > 0$، $\{X_n, n \geq 1\}$ فرآیند زمان های بین ورود باشد و بدانیم تا زمان t یک پیشآمد رخ داده است ($N(t)=1$) ، زمان وقوع این پیشآمد بر بازهٔ $[0,t]$ دارای توزیع یکنواخت است.

اثبات: فرض کنید $s \leq t$ ، در اینصورت:

$$P\{X_1 < s | N(t)=1\} = \frac{P\{X_1 < s, N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s}.e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

قضیه

در یک فرآیند پواسن با نرخ $\lambda > 0$، اگر $N(t) = n$ آنگاه n زمان ورود S_1 ، S_2 ، ... ، S_n دارای توزیع آماره های مرتب متناظر با n متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت بر بازهٔ $(0,t)$ هستند.

اثبات : تابع چگالی شرطی توأم S_1 ، S_2 ، ... ، S_n وقتیکه $N(t) = n$باشد را محاسبه می نمائیم. فرض میکنیم $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = t$ و h_i ها را آنقدر کوچک انتخاب می نمائیم که $t_i + h_i < t_{i+1}$، $i = 1,2,\ldots,n$ حال می توان نوشت :

$$P\{t_i \leq s_i \leq t_i + h_i, i = 1,2,\ldots,n | N(t) = n\} = \frac{P\{t_i \leq s_i \leq t_i + h_i, i = 1,2,\ldots,n \ \& \ N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}}$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \lambda h2 e^{-\lambda h_2} \ldots \lambda hn e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t-h_1-h_2-\ldots-h_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \ldots h_n$$

پس

$$\frac{P\{t_i \leq s_i \leq t_i + h_i, i = 1,2,\ldots,n | N(t) = n\}}{h_1 h_2 \ldots h_n} = \frac{n!}{t^n}$$

در اینصورت اگر $h_i \to 0$ چگالی شرطی توأم S_1 ، S_2 ، ... ، S_n به شرط $N(t)=n$ به صورت زیر خواهد بود:

$$f(t_1,t_2,...,t_n)=\frac{n!}{t^n} \quad ; \quad 0<t_1<t_2<...<t_n$$

که چگالی آماره های مرتب n متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت بر بازۀ $(0,t)$است.

قضیه

در یک فرآیند پواسن با نرخ $\lambda>0$، فرض کنید پیشآمدهایی که رخ می دهند یا از نوع I باشند و یا از نوع II ، و فرض کنید احتمال اینکه پیشآمدی از نوع I باشد به زمان وقوع پیشآمد بستگی داشته باشد، یعنی اگر این پیشآمد در زمان s رخ دهد با احتمال $P(s)$ از نوع I بوده و با احتمال $1-P(s)$ از نوع II باشد. در اینصورت اگر $N_i(t)$ تعداد پیشآمدهایی از نوع i $(i=1,2)$ باشد که تا زمان t رخ داده اند آنگاه $N_1(t)$ و $N_2(t)$ متغیرهای تصادفی مستقل پواسن با میانگینهای به ترتیب λtp و $\lambda t(1-p)$ هستند که در آنها $p=\frac{1}{t}\int_0^t P(s)ds$.

اثبات: توزیع توأم $N_1(t)$ و $N_2(t)$ را با شرطی کردن روی $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ محاسبه می کنیم:

$$P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m | N(t)=k\} P\{N(t)=k\}=$$

$$P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m | N(t)=n+m\} P\{N(t)=n+m\}$$

حال پیشآمد دلخواهی را که در فاصلهٔ $[0,t]$ رخ داده در نظر می گیریم. اگر این پیشآمد در زمان s رخ داده بود احتمال اینکه از نوع I باشد $P(s)$ بود، اما از طرفی می دانیم احتمال وقوع پیشآمد در زمان s از توزیع یکنواخت محاسبه می شود. پس احتمال اینکه این پیشآمد از نوع I باشد عبارتست از $p=\frac{1}{t}\int_0^t P(s)ds$ ، که از سایر پیشآمدها مستقل است.

در اینصورت $P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m | N(t)=n+m\}$ برابر احتمال n پیروزی و m شکست در $n+m$ تکرار مستقل یک آزمایش تصادفی دو نتیجه ای است . پس از توزیع دو جمله ای داریم:

$$P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m | N(t)=n+m\}=\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m$$

درنتیجه:

$$\begin{aligned}P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\}&=\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}\\&=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}\end{aligned}$$

که حاصلضرب دو چگالی پواسن با پارامترهای λtp و $\lambda t(1-p)$ است.

تعریف

فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$را یک فرآیند پواسن ناایستا[۱۱] یا غیرهمگن[۱۲] با تابع شدت[۱۳] $\lambda(t)$، $t \geq 0$ گوئیم هرگاه :

الف) $N(0) = 0$

ب) $\{N(t), t \geq 0\}$ دارای نموهای مستقل باشد.

ج) $P\{N(t+\delta) - N(t) \geq 2\} = o(\delta)$

د) $P\{N(t+\delta) - N(t) = 1\} = \lambda(t)\delta + o(\delta)$

نتیجه

در یک فرآیند پواسن غیرهمگن ، اگر تابع میانگین را بصورت $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ در نظر بگیریم، آنگاه می توان ثابت کرد($n \geq 0$):

$$P\{N(t+s) - N(t) = n\} = \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!} e^{-[m(t+s)-m(t)]}$$

یعنی $N(t+s) - N(t)$ دارای توزیع پواسن با میانگین $m(t+s) - m(t)$ است.

تعریف

فرآیند تصادفی $\{X(t), t \geq 0\}$را یک **فرآیند پواسن مرکب**[۱۴] گوئیم، هرگاه بتوان آنرا به ازاء هر $t \geq 0$ بصورت $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ نشان داد، که در آن $\{N(t), t \geq 0\}$یک فرآیند پواسن و $\{Y_i, i = 1,2,...\}$ خانواده ای از متغیرهای مستقل هم توزیعند، و فرآیند $\{N(t), t \geq 0\}$ و دنبالهٔ

[11] Nonstationary
[12] Nonhomogenous
[13] Intensity Function
[14] Compound Poisson Process

$\{Y_i, i=1,2,...\}$ مستقل فرض می شوند. میانگین و واریانس $X(t)$ به ترتیب عبارتند از :

$E[X(t)] = \lambda t E[Y]$ و $Var[X(t)] = \lambda t E[Y^2]$.

تعریف

اگر Λ یک متغیر تصادفی مثبت با توزیع G، و $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند شمارشی باشد، بطوریکه:

به شرط $\Lambda = \lambda$ ، $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسن با نرخ λ باشد، آنگاه $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند پواسن شرطی[۱۵] می نامیم.

در فرآیند پواسن شرطی داریم :

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda)$$

و توزیع شرطی Λ عبارتست از :

$$P\{\Lambda \leq x | N(t) = n\} = \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \, dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \, dG(\lambda)}$$

[15] Dependent Poisson Process