

تعریف

در یک زنجیر مارکف با فضای حالت L ، فرض کنیم $A \subseteq L$. اگر زنجیر در مرحله ای بتواند عضوی از A را اختیار کند، گوئیم A مورد اصابت زنجیر قرار گرفته است و اولین مرحله ورود فرآیند به A را زمان اصابت^۱ فرآیند به A می خوانیم. اگر زمان اصابت A را با T_A نمایش دهیم، داریم:

$$T_A = \text{Min}\{n \geq 1 : X_n \in A\}$$

اگر فرآیند هیچگاه در A قرار نگیرد $T_A = \infty$

از این تعریف نتیجه می شود که $T_A \geq 1$ و این متغیر تصادفی فقط مقادیر طبیعی را اختیار می کند.

تعریف

در یک زنجیر مارکف با فضای حالت L ، حالت $x \in L$ را گذرا^۲ گوئیم، هرگاه این احتمال وجود داشته باشد (احتمال مثبت) که زنجیر هیچگاه مجدداً به x باز نگردد. x را بازگشتی^۳ نامیم هرگاه با احتمال ۱ زنجیر پس از n مرحله متناهی حتماً به x برگردد.

تعریف

در یک زنجیر مارکف با فضای حالت L ، حالت $x \in L$ را جاذب^۴ گوئیم اگر $P_{xx} = 1$ ، یعنی به ازاء هر $y \neq x$ احتمال انتقال از x به y وجود ندارد و زنجیر در حالت x باقی خواهد ماند. همچنین اگر $A \subset L$ زیر مجموعه ای از فضای حالت باشد بطوریکه به ازاء هر $x \in A$ و هر $y \in L-A$ داشته باشیم $P_{xy} = 0$ ، آنگاه A را بسته یا جاذب می نامیم.

^۱ Hitting Time

^۲ Transient State

^۳ Recurrent State

^۴ Absorbing State

تعریف

فرآیند تصادفی $\{X_t, t \geq 0\}$ که در این مباحث مورد استفاده قرار خواهد گرفت برابر m تعریف خواهد شد، اگر فرآیند در زمان t در حالت m قرار داشته باشد. این فرآیند گسسته_زمان، از راست پیوسته، و از چپ کراندار است.

منظور از تاریخچه⁵ در زمان t عبارتست از اطلاعات مربوط به فرآیند در فاصله $[0, t]$ ، یعنی حالات X_s ، $0 \leq s < t$. این تاریخچه را با H_t نمایش می دهیم و بصورت یک سیگما_جبر در نظر می گیریم. با افزایش زمان یعنی بزرگ شدن t ، اطلاعات افزایش می یابد، یعنی $H_s \subseteq H_t$ ($0 \leq s < t$)، و این حالت را بطور معمول یک پالایش⁶ می نامیم.

توابع مخاطره⁷ خطر انتقال بعدی را مورد ملاحظه قرار می دهند. برای هر انتقال ممکن، یک تابع مخاطره وجود دارد، که برای حالت $X_{t-} \neq m$ عبارتست از:

$$\lambda_m(t|H_{t-}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[X_{t+\Delta t} = m | H_{t-}]}{\Delta t}$$

که تعمیمی است برای رابطه $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t | t \leq T]}{\Delta t}$. برای حالت $X_{t-} \neq m$ ، انتقال

به m امکانپذیر نیست و لذا مخاطره تعریف نخواهد شد. در این تعریف از H_{t-} به جای H_t استفاده

⁵ History

⁶ Filtration

⁷ Hazard Function

کردیم تا بدینوسیله مجموعه در معرض خطر⁸ از چپ پیوسته باشد. این مدل بسیار پویا است و این

توانایی را دارد که به هر پیشآمد قابل وقوعی توجه نماید.

برا ساس تابع مخاطره، مستقیماً⁹ امکان محاسبه احتمال عدم وقوع پیشآمدها در هر بازه وجود دارد. اما برای در نظر گرفتن انتقالهای متعدد پیشین ضروری است احتمالات انتقال محاسبه گردند. بنابراین چگونگی محاسبه احتمالات انتقال کلید حل مسئله هستند، که بعداً¹⁰ تشریح خواهد شد. برای هر حالت احتمال انتقال از حالات دیگر وجود دارد، مگر حالت آغازین⁹ که ورودی ندارد، بنابراین ضروری است بدانیم حالات پیشین هر حالت کدامند.

گروهی از فرآیندهای مورد استفاده در چنین مطالعاتی، مدل‌های مارکف هستند. در چنین مدل‌هایی در هر زمان t حالت فرآیند تنها به حالت قبلی آن بستگی دارد. یعنی $\lambda_m(t)$ تنها به H_{t-} بستگی دارد (از طریق X_{t-}).

وقتی که توابع مخاطره به زمان t بستگی ندارند، فرآیند مارکف همگن¹⁰ خوانده می شود، و در این حالت احتمالات انتقال مربوط به زمانهای v و t تنها از طریق $t-v$ محاسبه می شوند. گروه دیگری از فرآیندهای مارکفی، مدل‌های پیش رونده¹¹ هستند، که در آنها حالت آغازین دارای ورودی نیست و به هر حالت بعدی نیز فقط یک ورودی وجود دارد. در مدل‌های مارکفی توسعه یافته¹² مخاطرات انتقال به زمان های انتقال به حالات فعلی وابسته هستند.

احتمالات انتقال¹³ در ساده ترین شکل عبارتست از :

⁸ Risk Set

⁹ Initial State

¹⁰ Homogeneous

¹¹ Progressive

¹² Extension

¹³ Transition Probabilities

$$P_m(t) = \Pr[X_t = m]$$

که عبارتست از احتمال قرار داشتن فرآیند X در حالت m در زمان t . احتمالات انتقال را با توجه به پیشینه فرآیند می توان تعریف کرد:

$$P_m(v, t) = \Pr(X_t = m | X_u, u \in [0, v]) \quad ; \quad v \leq t$$

که عبارتست از احتمال قرار داشتن فرآیند X در حالت m در زمان t به شرطی که در زمان $u \in [0, v]$ در حالت معینی قرار داشته است. لیکن در زنجیرهای مارکف آخرین اطلاع برای محاسبه

$$P_m(v, t) = \Pr(X_t = m | X_u, u \in [0, v]) = \Pr(X_t = m | X_v) \quad ; \quad v \leq t \quad \text{لذا کافی است.}$$

و چون فرآیند در زمان v در حالت معینی مانند n قرار می گیرد:

$$P_{nm}(v, t) = \Pr[X_t = m | X_v = n]$$

که عبارتست از احتمال انتقال از حالت n در زمان v به حالت m در زمان t .